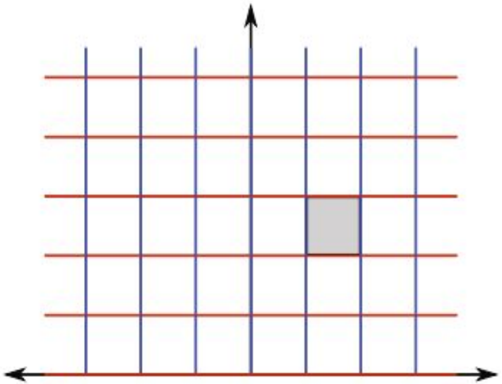
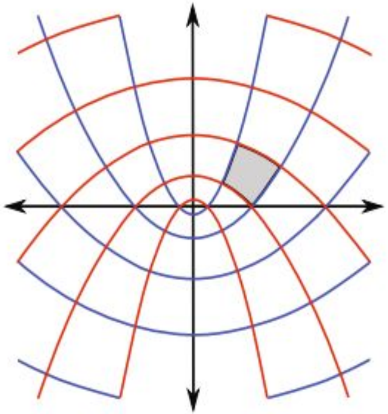
Конформная теория поля в системах с деформированным гамильтонианом

Выполнил:
Студент 4-го курса, 443 группы
А. А. Кривенков
Научный руководитель –
с.н.с. МИАН РАН, к.ф.-м.н., Д.С. Агеев

Содержание

Конформная теория поля d измерений





$$x \to x'$$

$$g'_{\mu\nu}(x') = \Lambda(x) g_{\mu\nu}(x)$$

Преобразования:

Сдвиги - $x'^{\mu} = x^{\mu} + a^{\mu}$

Вращения - $x'^{\mu} = \alpha x^{\mu}$

Дилатации - $x'^{\mu} = M^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu}$

SCT - $x'^{\mu} = \dfrac{x^{\mu} - b^{\mu} x^2}{1 - 2b \cdot x + b^2 x^2}$

Генераторы:

$$P_\mu = -i\partial_\mu$$
$$D = -ix^\mu \partial_\mu$$
$$L_{\mu\nu} = i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu)$$
$$K_\mu = -i\left(2x_\mu x^\nu \partial_\nu - x^2 \partial_\mu\right)$$

Двумерная конформная теория поля:

$$(x^0, x^1)$$

$$z = x^0 + ix^1$$

$$\overline{z} = x^0 - ix^1$$

$$z' = z + \epsilon(z) = z + \sum_{n\in\mathbb{Z}} \epsilon_n(-z^{n+1})$$

$$\overline{z}' = \overline{z} + \overline{\epsilon}(\overline{z}) = \overline{z} + \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{\epsilon}_n(-\overline{z}^{n+1})$$

$$\Longrightarrow \quad l_n = -z^{n+1}\partial_z$$

$$\overline{l}_n = -\overline{z}^{n+1}\partial_{\overline{z}}$$

Алгебра:

$$[l_m, l_n] = (m-n)l_{m+n}$$

$$[\overline{l}_m, \overline{l}_n] = (m-n)\overline{l}_{m+n}$$

$$[l_m, \overline{l}_n] = 0$$

Алгебра Вирасоро: $[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{c}{12}(m^3 - m)\delta_{m+n,0}$

Определение.

$$z \mapsto f(z)$$

$$\phi(z,\bar{z}) \mapsto \phi'(z,\bar{z}) = \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^{h} \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}\right)^{\bar{h}} \phi(f(z), \bar{f}(\bar{z})),\ \phi(z,\bar{z})$$

\- примарное поле с конформной размерностью $(h, \bar{h})$

Факты из CFT:

- **<u>Корреляционная функция:</u>** $\langle \phi_i(z)\phi_j(w)\rangle = \dfrac{C\delta_{h_l,h_j}}{(z-w)^{2h}}$
- Тензор энергии-импульса: $T(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} z^{-n-2} L_n \qquad L_n = \dfrac{1}{2\pi i}\oint dz\, z^{n+1}\, T(z)$
- Преобразование ТЭИ: $T'(z) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)^{2} T(f(z)) + \dfrac{c}{12} S(f(z), z)$ при: $z \mapsto f(z)$

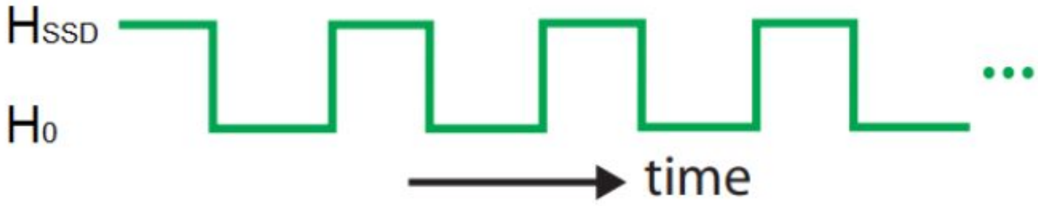
Точно решаемые анизотропные деформации CFT

$$\mathcal{H} = \int_0^L \mathrm{d}x\, f(x) T_{00}(x)$$

$$H_0 = \int_0^L dx T_{00}(x) = \frac{2\pi}{L}(L_0 + \bar{L}_0) - \frac{c\pi}{6L}$$

$$H_{SSD} = \int_0^L dx 2\sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) T_{00}(x) = \frac{2\pi}{L}\left(L_0 - \frac{L_{-1} + L_1}{2} + \bar{L}_0 - \frac{\bar{L}_{-1} + \bar{L}_1}{2}\right) - \frac{c\pi}{6L}$$

- Периодически меняющийся гамильтониан (<<Floquet drive>>)



1-й цикл:

$$H_F(t) = \begin{cases} H_{SSD}, & 0 < t < T_0 \\ H_0, & T_0 < t < T_1 \end{cases}$$

Динамика двухточечной корреляционной функции

$\langle\phi(x,t)\phi(x_0,0)\rangle$ в системе с гамильтонианом $H_F(t)$

Эволюция: $|\phi(x,t)\rangle = e^{-iH_F(t-t_0)}|\phi(x,t_0)\rangle$

1-й цикл: $F(x,\tau;x_0,0) = \left\langle \mathrm{e}^{\tau_1 H_{\mathrm{SSD}}}\mathrm{e}^{\tau_0 H_0}\phi(\omega_1,\bar{\omega}_1)\mathrm{e}^{-\tau_0 H_0}\mathrm{e}^{-\tau_1 H_{\mathrm{SSD}}}\phi(\omega_0,\bar{\omega}_0)\right\rangle \quad w = \tau + ix$

$$w \to z = \exp\left\{\frac{2\pi w}{L}\right\}$$

$$F(x,\tau;x_0,0) = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^{4h}\left\langle \mathrm{e}^{\tau_1 H_{\mathrm{SSD}}}\mathrm{e}^{\tau_0 H_0}\phi(z_1,\bar{z}_1)\mathrm{e}^{-\tau_0 H_0}\mathrm{e}^{-\tau_1 H_{\mathrm{SSD}}}\phi(z_0,\bar{z}_0)\right\rangle$$

Динамика двухточечной корреляционной функции

$$H_{\mathrm{Mob}(\theta)} = L_0 - \frac{\tanh(2\theta)}{2}(L_1 + L_{-1}) + \bar{L}_0 - \frac{\tanh(2\theta)}{2}(\bar{L}_1 + \bar{L}_{-1})$$

$$H_0 = H_{\mathrm{Mob}(0)}$$

$$H_{\mathrm{SSD}} = H_{\mathrm{Mob}(\theta\to\infty)}$$

$$z \to \hat{z} = f(z) = \frac{-\cosh(\theta)z + \sinh(\theta)}{\sinh(\theta)z - \cosh(\theta)} \quad \Longrightarrow \quad H_{\mathrm{M\ddot{o}b}(\theta)} \propto \frac{2\pi}{L\cosh(2\theta)}(L_0 + \bar{L}_0)$$

т.е. дилатация с коэффициентом

Полная эволюция через $H_{\mathrm{Mob}(\theta)}$: $\quad z \to z_\theta^{\mathrm{new}}(z) = f^{-1}(\lambda f(z))$

$$z \to \tilde{z}_1 = \frac{az+b}{cz+d}, \qquad \begin{cases} a = \left(1 + \frac{\pi\tau_1}{L}\right)e^{\frac{\pi\tau_0}{L}} \\ b = -\frac{\pi\tau_1}{L}e^{-\frac{\pi\tau_0}{L}} \\ c = \frac{\pi\tau_1}{L}e^{\frac{\pi\tau_0}{L}} \\ d = \left(1 - \frac{\pi\tau_1}{L}\right)e^{-\frac{\pi\tau_0}{L}} \end{cases}$$

- соответствует эволюции для 1-го цикла

$$z \to \tilde{z}_n(z) = f^n(z) = \frac{Az + B}{Cz + D}$$ - соответствует эволюции для n циклов

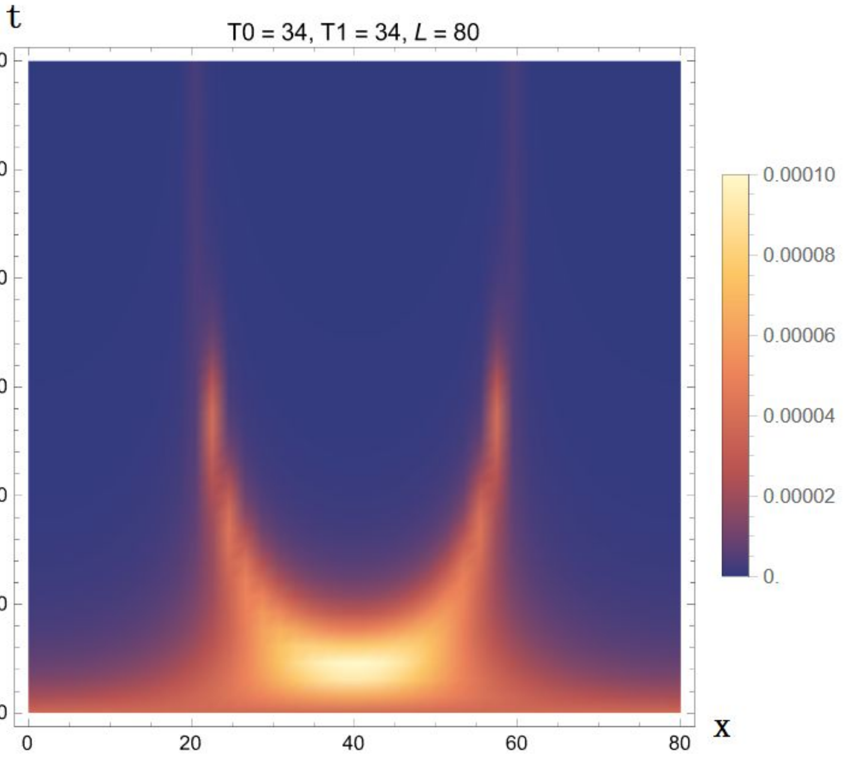
$$\begin{cases} A = \gamma_1 - \eta^n \gamma_2, \\ B = (\eta^n - 1)\gamma_1 \gamma_2, \\ C = 1 - \eta^n, \\ D = \gamma_1 \eta^n - \gamma_2. \end{cases} \qquad \begin{cases} \gamma_1 = \frac{a-d-\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{2c}, \\ \gamma_2 = \frac{a-d+\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{2c}, \\ \eta = \frac{(a+d)+\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{a+d-\sqrt{(a-d)^2+4bc}}. \end{cases}$$

$$\langle \phi(x,t)\phi(x_0,0)\rangle = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^{4h} \left[\frac{\partial \tilde{z}_n}{\partial z}\bigg|_{z_1} \frac{\partial \bar{\tilde{z}}_n}{\partial \bar{z}}\bigg|_{\bar{z}_1} \right]^h \left\langle \phi\left(\tilde{z}_n, \bar{\tilde{z}}_n\right) \phi\left(\tilde{z}_0, \bar{\tilde{z}}_0\right) \right\rangle$$

$$\langle 0|\phi(x,t)\phi(x_0,0)|0\rangle = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^{4h} \left[\frac{\partial \tilde{z}_n}{\partial z}\bigg|_{z_1} \frac{\partial \bar{\tilde{z}}_n}{\partial \bar{z}}\bigg|_{\bar{z}_1} \right]^h \frac{1}{(z_0 - \tilde{z}_n)^{2h}} \frac{1}{\left(\bar{z}_0 - \bar{\tilde{z}}_n\right)^{2h}}$$

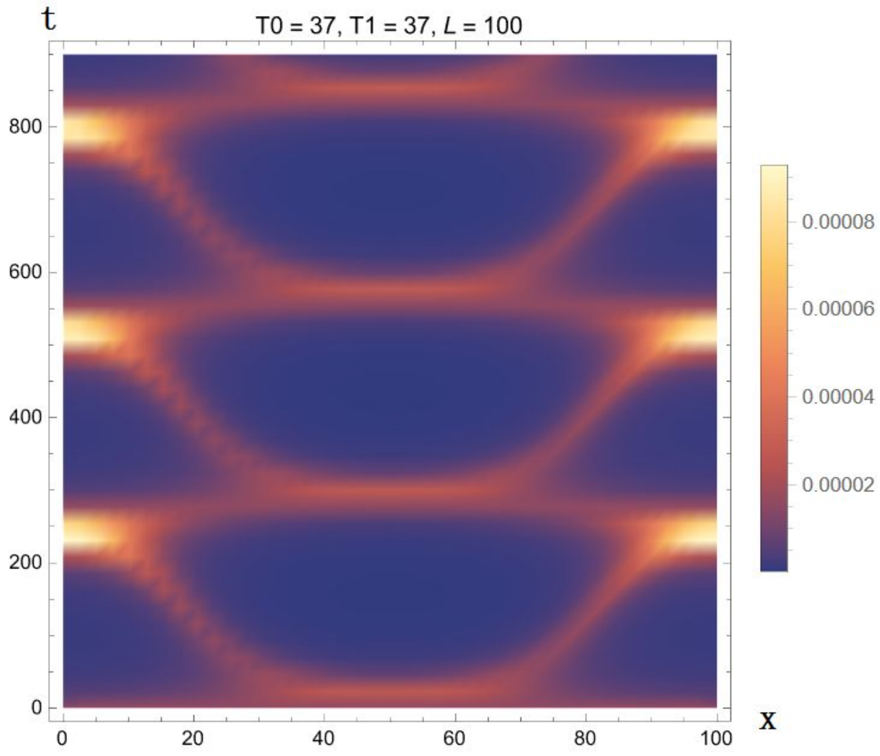
Heating phase

$$(\eta \in \mathbb{R}^{+})$$



Non-heating phase

$$(\eta \in \mathbb{C}, |\eta| = 1)$$



(фаза определяется только параметрами T0, T1, L)

Метрика чёрной дыры

$$\tilde{z}_n = \tilde{u}_n + i\tilde{v}_n$$

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\tilde{z}_n\,\mathrm{d}\bar{\tilde{z}}_n = \mathrm{d}\tilde{u}_n^2 + \mathrm{d}\tilde{v}_n^2$$

$$\begin{cases} \tilde{u}_n(x,\tau) = \mathrm{Re}(\tilde{z}_n) = \dfrac{AC+BD+(AD+BC)\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)}{C^2+D^2+2C\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)}, \\ \tilde{v}_n(x,\tau) = \mathrm{Im}(\tilde{z}_n) = \dfrac{(AD-BC)\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)}{C^2+D^2+2C\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)}. \end{cases}$$

$$(\tilde{z}_n, \bar{\tilde{z}}_n) \to (x,\tau)$$

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{e}^{2\sigma(x,\tau)}\left(\mathrm{d}x^2 - g(x)\mathrm{d}\tau^2 + 2h(x)\mathrm{d}x\;\mathrm{d}t\right)$$

$$\downarrow$$

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 - g(x)\mathrm{d}t^2 + 2h(x)\mathrm{d}x\;\mathrm{d}t$$

$$\begin{cases} g(x) = \zeta^2 \prod_{i=1}^{2}\left[1+\gamma_i^2 - 2\gamma_i\cos\left(\dfrac{2\pi x}{L}\right)\right] \\ h(x) = \mathrm{i}\zeta(\gamma_1\gamma_2 - 1)\sin\left(\dfrac{2\pi x}{L}\right) \\ \zeta = -\dfrac{L}{2\pi\mathrm{i}}\dfrac{1}{(T_0+T_1)}\dfrac{\log(\eta)}{(\gamma_1-\gamma_2)} \end{cases}$$

Нулевая геодезическая определяется: $ds^2 = 0 \; = \mathrm{d}x^2 - g(x)\mathrm{d}t^2 + 2h(x)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$

$$2h(x(t))\dot{x}(t) + \dot{x}^2(t) - g(x(t)) = 0$$

$$\pm t(x) = \int_{x_0}^{x} dx' \frac{1}{\sqrt{h(x')^2 + g(x')} \mp h(x')}$$

Скорость распространения возбуждений:

$$v(x) = h(x) \mp \sqrt{h(x)^2 + g(x)}$$

Условие инвариантности:

$$\gamma_1\gamma_2 = 1, \; h(x) = 0$$

Рассмотрим конкретный случай:

$$H_{\mathrm{F}}(t) = \begin{cases} H_0 & 0 < t < \frac{T_0}{2}, \\ H_{\mathrm{SSD}} & \frac{T_0}{2} < t < \frac{T_0}{2} + T_1, \\ H_0 & \frac{T_0}{2} + T_1 < t < \frac{3T_0}{2} + T_1, \\ \text{etc.} & \end{cases}$$

$$v(x) = [g(x)]^{1/2} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \frac{L\log(\eta)}{(T_0+T_1)} \frac{\left(1+\gamma_1^2 - 2\gamma_1 \cos\frac{2\pi x}{L}\right)}{\gamma_1^2 - 1}$$

$v(x) = 0$ в точках: $x_c = \frac{L}{2\pi}\arccos\left(\frac{1+\gamma_1^2}{2\gamma_1}\right)$ и $L - x_c$

Перепишем метрику в терминах сингулярности $x_c = \frac{L}{2\pi}\arccos\left(\frac{1+\gamma_1^2}{2\gamma_1}\right)$

Используя разложение в ряд около x_c …

$\mathrm{d}s^2 = -4A^2\tan^2\left(\frac{2\pi x_c}{L}\right)\frac{\pi^2}{L^2}(x-x_c)^2\,\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2$ - метрика Риндлера

Замена: $\frac{C}{2}(x-x_c)^2 = (y-x_c)$ где: $C^2 = 4A^2\tan^2\left(\frac{2\pi x_c}{L}\right)\frac{\pi^2}{L^2}$

$\mathrm{d}s^2 = -2C(y-x_c)\mathrm{d}t^2 + \frac{1}{2C}\frac{1}{(y-x_c)}\mathrm{d}y^2$ - метрика Шварцшильда в (1+1)

$$\Theta_H = \frac{C}{2\pi} = \frac{|\log(\eta)|}{2\pi(T_0+T_1)}$$

Итоги:

- Рассмотрена точно решаемая деформация CFT.

- Вычислена динамика двухточечной корреляционной функции системы с периодическим гамильтонианом для двух фаз: нагрева и без нагрева. Рассмотрены особенности эволюции корреляционной функции в каждой из этих фаз.

- Показано, что эффективная метрика в фазе нагрева соответствует метрике Шварцшильда около черной дыры, вычислена температура Хокинга для неё.

Используемая литература:

[1] P. Di Francesco, P. Mathieu and D. Senechal, “Conformal Field Theory,” Springer-Verlag, 1997, ISBN 978-0-387-94785-3, 978-1-4612-7475-9

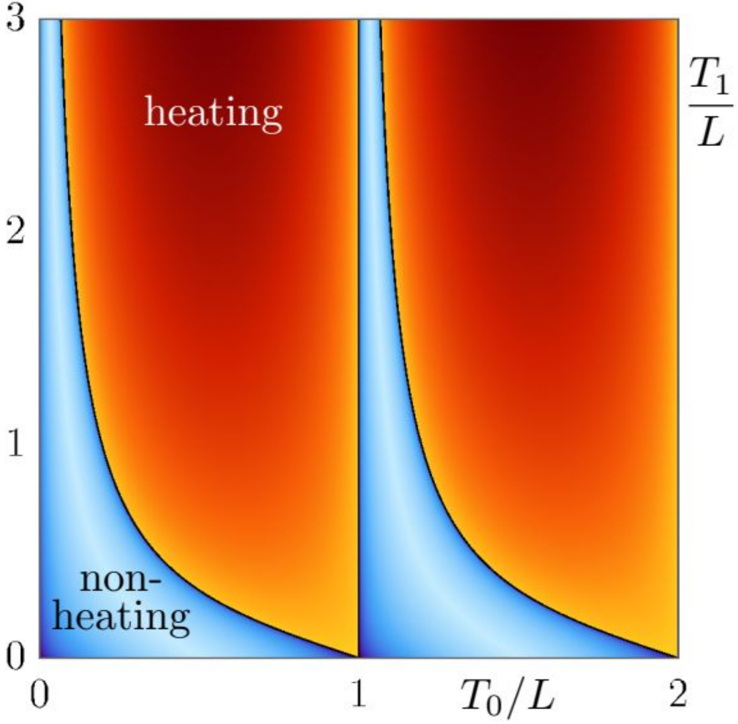
[2] B. Lapierre, K. Choo, C. Tauber, A. Tiwari, T. Neupert and R. Chitra, Phys. Rev. Res. **2** (2020) no.2, 023085 doi:10.1103/PhysRevResearch.2.023085 [arXiv:1909.08618 [cond-mat.str-el]].

[3] X. Wen and J. Q. Wu, [arXiv:1805.00031 [cond-mat.str-el]].

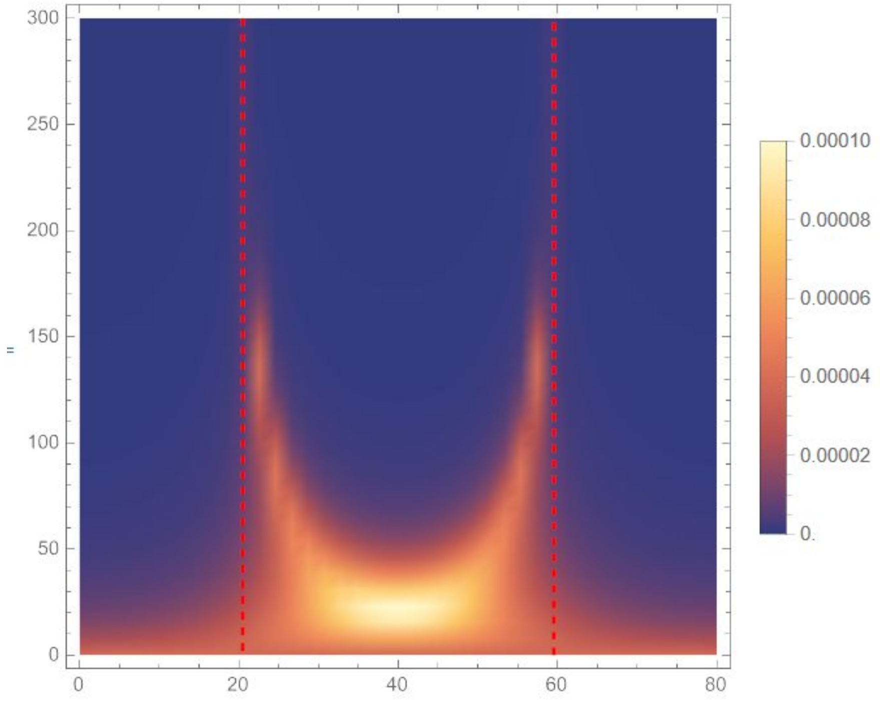
[4] R. Fan, Y. Gu, A. Vishwanath and X. Wen, Phys. Rev. X **10** (2020) no.3, 031036 doi:10.1103/PhysRevX.10.031036 [arXiv:1908.05289 [cond-mat.str-el]].

[5] X. Wen and J. Q. Wu, Phys. Rev. B **97** (2018) no.18, 184309 doi:10.1103/PhysRevB.97.184309 [arXiv:1802.07765 [cond-mat.str-el]].

Приложение



3
2
1
0
0
1
2
heating
non-
heating
$\frac{T_1}{L}$
T_0/L



300
250
200
150
100
50
0
0
20
40
60
80
0.00010
0.00008
0.00006
0.00004
0.00002
0.